

Matemática Atuarial II

Aula 12

Danilo Machado Pires
danilo.pires@unifal-mg.edu.br

Créditos: Leonardo Henrique Costa; leonardo.costa@unifal-mg.edu.br

<https://www.portahalley.org/materiais.html#notas>

➤ Notas de aula da disciplina Matemática Atuarial II, oferecida pelo curso de Bacharelado em Ciências Atuariais da Universidade Federal de Alfenas, campus Varginha.

PIRES, M.D.; COSTA, L.H. Status último sobrevivente: Seguros pagos no momento da falha. [Notas de aula]. Universidade Federal de Alfenas, Curso de Ciências Atuariais, Alfenas, 2026. Disponível em: <https://www.portahalley.org/materiais.html#notas> .Acesso em: 28 jun. 2026.

Status último sobrevivente

A densidade de $T_{\overline{x},\overline{y}}$ é obtida por meio de (sob a hipótese de independência):

$$\frac{dF_{T_{\overline{x},\overline{y}}}(t)}{dt} = \frac{d {}_tq_{\overline{x},\overline{y}}}{dt} = \frac{d[{}_tq_x {}_tq_y]}{dt}$$

$$\frac{dF_{T_{\overline{x},\overline{y}}}(t)}{dt} = f_{T_x}(t) {}_tq_y + f_{T_y}(t) {}_tq_x$$

Lembrando da expressão da força de mortalidade

$$\mu(x+t) = \frac{f_{T_x}(t)}{1 - F_{T_x}(t)} = \frac{f_{T_x}(t)}{{}_tp_x}$$

Então:

$$f_{T_x}(t) = \mu(x+t) {}_tp_x \quad \text{e} \quad f_{T_y}(t) = \mu(y+t) {}_tp_y$$

Status último sobrevivente

A densidade de $T_{\overline{x,y}}$ é obtida por meio de:

$$\frac{dF_{T_{\overline{x,y}}}(t)}{dt} = \mu(x+t) {}_t p_x {}_t q_y + \mu(y+t) {}_t p_y {}_t q_x$$

$$f_{T_{\overline{x,y}}}(t) = \mu(x+t) {}_t p_x {}_t q_y + \mu(y+t) {}_t p_y {}_t q_x$$

- $\mu(x+t) {}_t p_x {}_t q_y$: a última morte ocorre pela morte de x em t , quando y já morreu.
- $\mu(y+t) {}_t p_y {}_t q_x$: a última morte ocorre pela morte de y em t , quando x já morreu.

Status último sobrevivente

A força de mortalidade do status último sobrevivente será:

$$\mu(\overline{x+t, y+t}) = \frac{f_{T_{\overline{x,y}}}(t)}{{}_t p_{\overline{x,y}}}$$

$$\mu(\overline{x+t, y+t}) = \frac{\mu(x+t) {}_t p_x {}_t q_y + \mu(y+t) {}_t p_y {}_t q_x}{1 - {}_t q_x {}_t q_y}$$

A força de mortalidade do status último sobrevivente é a taxa instantânea de ocorrência da última morte, condicionada ao fato de que pelo menos uma das vidas ainda esteja viva no instante t .

Resumo

$$T_{x,y} = \min(T_x, T_y)$$

$$F_{T_{x,y}}(t) = {}_t q_x + {}_t q_y - {}_t q_x {}_t q_y = {}_t q_{x,y}$$

$$S_{T_{x,y}}(t) = {}_t p_x {}_t p_y = {}_t p_{x,y}$$

$$\mu(x+t, y+t) = \mu(x+t) + \mu(y+t)$$

$$f_{T_{x,y}}(t) = {}_t p_{x,y} \mu(x+t, y+t)$$

$$T_{\overline{x,y}} = \max(T_x, T_y)$$

$$F_{T_{\overline{x,y}}}(t) = {}_t q_x {}_t q_y = {}_t q_{\overline{x,y}}$$

$$S_{T_{\overline{x,y}}}(t) = {}_t p_x + {}_t p_y - {}_t p_x {}_t p_y = {}_t p_{\overline{x,y}}$$

$$\begin{aligned} & \mu(\overline{x+t, y+t}) \\ &= \frac{\mu(x+t) {}_t p_x {}_t q_y + \mu(y+t) {}_t p_y {}_t q_x}{1 - {}_t q_x {}_t q_y} \end{aligned}$$

$$f_{T_{\overline{x,y}}}(t) = {}_t p_{\overline{x,y}} \mu(\overline{x+t, y+t})$$

Exemplo 1: Determine a função acumulada e a função sobrevivência para o status último sobrevivente.

Seja o tempo de vida futuro T_x e T_y independentes, ambos com a seguinte função de densidade.

$$f(t) = \begin{cases} 0,02(10 - t) & 0 < t < 10 \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$$

$${}_tq_x = {}_tq_y = 0,2(t - 0,05t^2)$$

$$\mu(x + t) = \mu(y + t) = \frac{2}{10 - t}$$

Exemplo 1:

$${}_tq_{\overline{x,y}} = {}_tq_x {}_tq_y$$

$${}_tq_{\overline{x,y}} = [0,2(t - 0,05t^2)]^2$$

Exemplo 1:

$${}_t p_{\overline{x,y}} = {}_t p_x + {}_t p_y - {}_t p_x {}_t p_y$$

$${}_t p_{\overline{x,y}} = [1 - 0,2(t - 0,05t^2)] + [1 - 0,2(t - 0,05t^2)] - [1 - 0,2(t - 0,05t^2)]^2$$

$${}_t p_{\overline{x,y}} = 2[1 - 0,2(t - 0,05t^2)] - [1 - 0,2(t - 0,05t^2)]^2$$

$${}_t p_{\overline{x,y}} = [1 - 0,2(t - 0,05t^2)]\{2 - [1 - 0,2(t - 0,05t^2)]\}$$

$${}_t p_{\overline{x,y}} = [1 - 0,2(t - 0,05t^2)]\{1 + 0,2(t - 0,05t^2)\}$$

$${}_t p_{\overline{x,y}} = 1 - [0,2(t - 0,05t^2)]^2$$

Exemplo 2: Determine a função de densidade e a força de mortalidade para o status último sobrevivente.

Sejam os tempos de vida futuro T_x e T_y independentes, ambos com a seguinte função de densidade.

$$f(t) = \begin{cases} 0,02(10 - t) & 0 < t < 10 \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$$

$${}_tq_x = {}_tq_y = 0,2(t - 0,05t^2) \qquad \mu(x + t) = \mu(y + t) = \frac{2}{10-t}$$

$${}_tq_{\overline{x,y}} = [0,2(t - 0,05t^2)]^2 \qquad {}_tp_{\overline{x,y}} = 1 - [0,2(t - 0,05t^2)]^2$$

Exemplo 2:

$$f_{T_{\overline{x,y}}}(t) = \mu(x+t) {}_t p_x {}_t q_y + \mu(y+t) {}_t p_y {}_t q_x$$

$$\begin{aligned} f_{T_{\overline{x,y}}}(t) &= \frac{2}{10-t} \{[1 - 0,2(t - 0,05t^2)]0,2(t - 0,05t^2)\} \\ &+ \frac{2}{10-t} \{[1 - 0,2(t - 0,05t^2)]0,2(t - 0,05t^2)\} \end{aligned}$$

$$f_{T_{\overline{x,y}}}(t) = \frac{4}{10-t} \{[1 - 0,2(t - 0,05t^2)]0,2(t - 0,05t^2)\}$$

Exemplo 2:

$$\mu(\overline{x+t, y+t}) = \frac{\mu(x+t) {}_t p_x {}_t q_y + \mu(y+t) {}_t p_y {}_t q_x}{{}_t p_{\overline{x,y}}}$$

$$\mu(\overline{x+t, y+t}) = \frac{\frac{4}{10-t} \{ [1 - 0,2(t - 0,05t^2)] 0,2(t - 0,05t^2) \}}{1 - [0,2(t - 0,05t^2)]^2}$$

$$f(t) = \begin{cases} 0,02(10 - t) & 0 < t < 10 \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$$

$${}_t p_{x,y} = [1 - 0,2(t - 0,05t^2)]^2$$

$${}_t q_{x,y} = 1 - [0,01(10 - t)^2]^2$$

$$\mu(x + t, y + t) = \frac{4}{10 - t}$$

$$f_{T_{x,y}}(t) = [1 - 0,2(t - 0,05t^2)]^2 \frac{4}{10 - t}$$

$${}_t p_{\overline{x},\overline{y}} = 1 - [0,2(t - 0,05t^2)]^2$$

$${}_t q_{\overline{x},\overline{y}} = [0,2(t - 0,05t^2)]^2$$

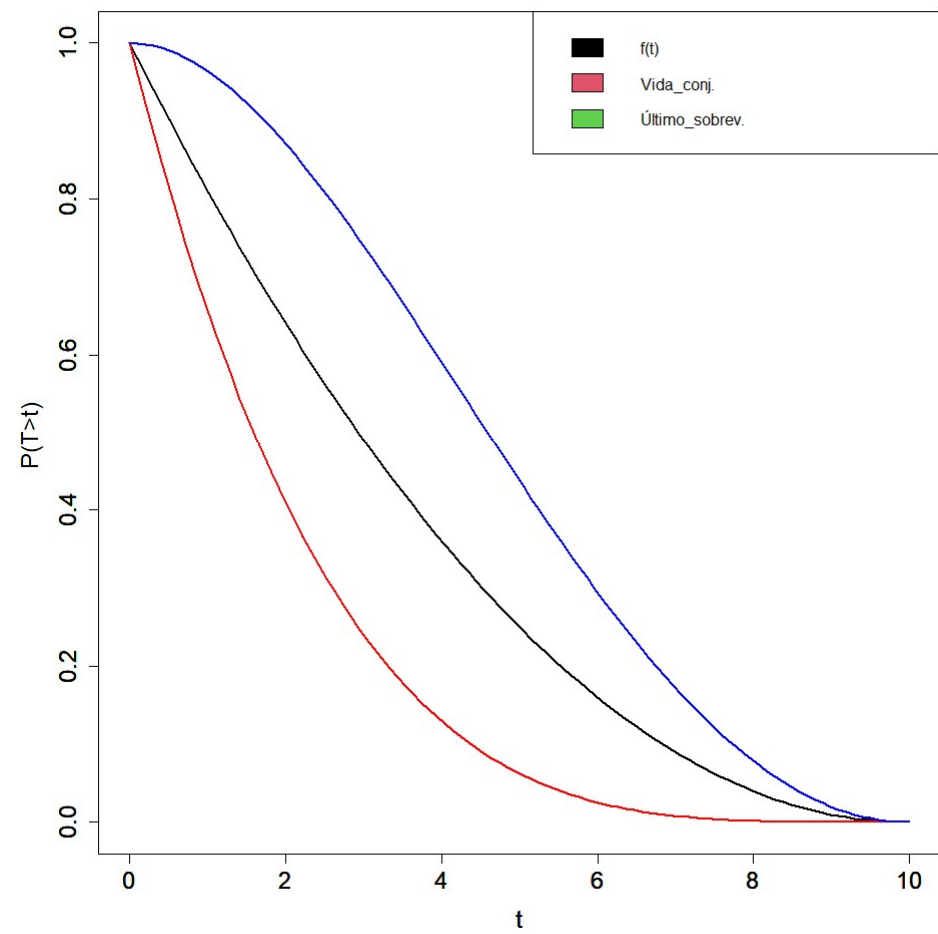
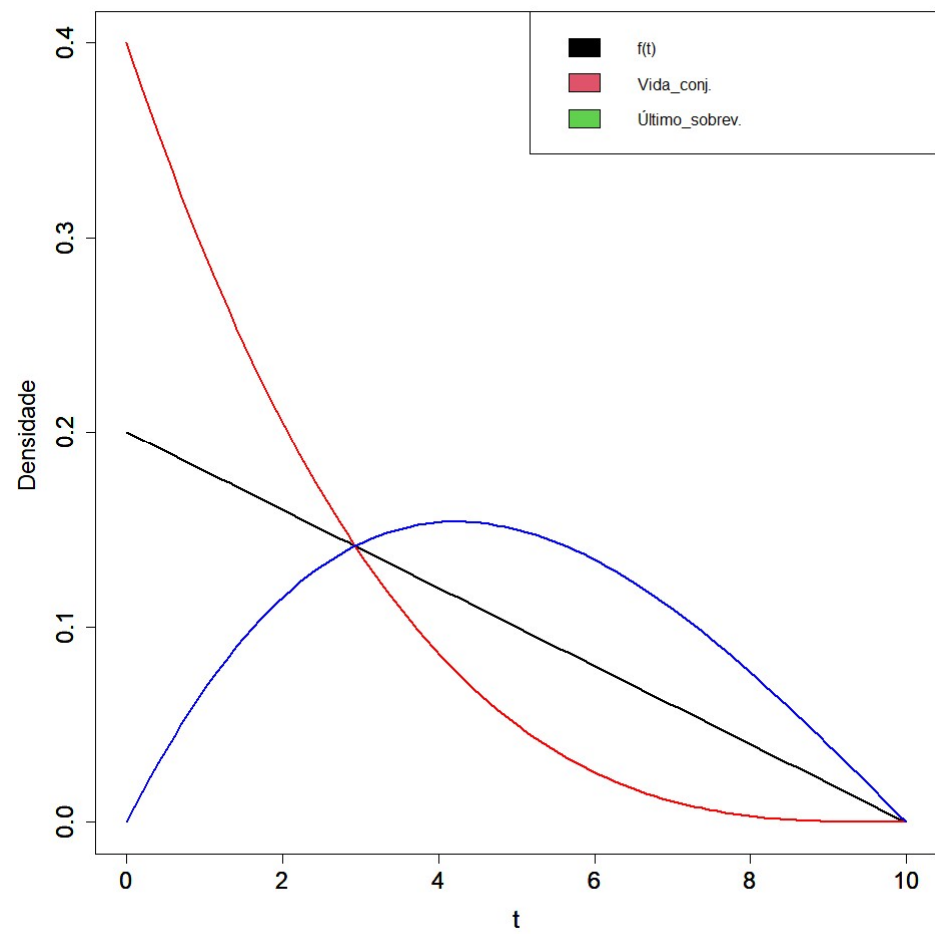
$$\begin{aligned} \mu(\overline{x + t}, \overline{y + t}) \\ &= \frac{4}{10 - t} \frac{\{[1 - 0,2(t - 0,05t^2)]0,2(t - 0,05t^2)\}}{1 - [0,2(t - 0,05t^2)]^2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f_{T_{\overline{x},\overline{y}}}(t) \\ &= \frac{4}{10 - t} \{[1 - 0,2(t - 0,05t^2)]0,2(t - 0,05t^2)\} \end{aligned}$$

$$e_x = e_y = 3,3333$$

$$e_{x,y} = 2$$

$$e_{\overline{x},\overline{y}} \approx 4,66$$



Status último sobrevivente(Seguro vitalício)

Ao lidar com $T_{\overline{x,y}}$, onde T_x e T_y são variáveis aleatórias contínuas da sobrevida de x e y , temos que o prêmio puro único do seguro vitalício, com benefício unitário, é calculado por

$$\bar{A}_{x,y} = \int_0^{\infty} e^{-\delta t} f_{T_{\overline{x,y}}}(t) dt$$

Status último sobrevivente(Seguro temporário)

Caso o seguro tenha uma cobertura pré-determinada então o prêmio puro único do seguro temporário, com benefício unitário (pago no momento da falha do status) será:

$$\bar{A}_{\bar{u}^{1:\overline{n}|}} = \int_0^n e^{-\delta t} f_{T_{\bar{u}}}(t) dt$$

em que $u = \{x, y\}$, logo $f_{T_{\bar{u}}}(t) = f_{T_{\overline{x,y}}}(t)$.

Exemplo 1: Seja $T_{\overline{x,y}} = \max(T_x, T_y)$ em que $T_x \sim \text{Exp}(0,025)$ e $T_y \sim \text{Exp}(0,02)$. Usando $\delta = 0,05$. Calcule o valor de $\bar{A}_{\overline{u^1:20|}}$, em que $u = \{x, y\}$.

Solução:

$$\bar{A}_{\overline{u^1:20|}} = \int_0^{20} e^{-\delta t} \{ [\mu(x+t) {}_t p_x] {}_t q_y + [\mu(y+t) {}_t p_y] {}_t q_x \} dt .$$

Tendo em vista que

$${}_t p_x = 1 - e^{-0,025t} , \quad {}_t q_x = e^{-0,025t} , \quad \mu(x+t) = 0,025 ,$$

$${}_t p_y = 1 - e^{-0,02t} , \quad {}_t q_y = e^{-0,02t} \text{ e } \mu(y+t) = 0,02$$

Então:

$$\bar{A}_{\bar{u}^1:\overline{20}|} = \int_0^{20} e^{-\delta t} \{ [\mu(x+t) {}_t p_x] {}_t q_y + [\mu(y+t) {}_t p_y] {}_t q_x \} dt.$$

Tendo em vista que

$${}_t p_x = 1 - e^{-0,025t}, \quad {}_t q_x = e^{-0,025t}, \quad \mu(x+t) = 0,025,$$

$${}_t p_y = 1 - e^{-0,02t}, \quad {}_t q_y = e^{-0,02t} \text{ e } \mu(y+t) = 0,02$$

Então:

$$\bar{A}_{\bar{u}^1:\overline{20}|} = \int_0^{20} e^{-0,05t} \{ [(0,025)(1 - e^{-0,025t})]e^{-0,02t} + [(0,02)(1 - e^{-0,02t})]e^{-0,025t} \} dt,$$

$$\bar{A}_{\bar{u}^1:\overline{20}|} = \int_0^{20} (0,025e^{-0,07t} - 0,045e^{-0,095t} + 0,02e^{-0,075t}) dt,$$

$$\bar{A}_{\bar{u}^1:\overline{20}|} \approx \mathbf{0,0734}.$$

Status último sobrevivente-Relação entre $T_{x,y}$ e $T_{\overline{x,y}}$

$$\bar{A}_{x,y} + \bar{A}_{\overline{x,y}} = \bar{A}_x + \bar{A}_y$$

$${}_m|\bar{A}_{\overline{x,y}} + {}_m|\bar{A}_{x,y} = {}_m|\bar{A}_x + {}_m|\bar{A}_y$$

$$\bar{A}_{u^{1:\bar{n}}|} + \bar{A}_{\bar{u}^{1:\bar{n}}|} = \bar{A}_{x^{1:\bar{n}}|} + \bar{A}_{y^{1:\bar{n}}|}$$

$${}_m|\bar{A}_{\bar{u}^{1:\bar{n}}|} + {}_m|\bar{A}_{u^{1:\bar{n}}|} = {}_m|\bar{A}_{x^{1:\bar{n}}|} + {}_m|\bar{A}_{y^{1:\bar{n}}|}$$

em que $u = \{x, y\}$

- **Portal Halley** : <https://atuaria.github.io/portalhalley/>

Bowers et al. **Actuarial Mathematics**, 2ª edição. SOA, 1997.

D. C. M. Dickson, M. R. Hardy and H. R. Waters.
Actuarial Mathematics for Life Contingent Risks.
Cambridge University Press, 2019.

CORDEIRO FILHO, Antônio. **Cálculo Atuarial Aplicado: teoria e aplicações, exercícios resolvidos e propostos.**
São Paulo: Atlas, 2009.

FERREIRA, P. P. **Matemática Atuarial: Riscos de Pessoas.** Rio de Janeiro: ENS, 2019

PIRES, M.D.; COSTA, L.H.; FERREIRA, L.; MARQUES, R.
Fundamentos da matemática atuarial: vida e pensões.
Curitiba : CRV, 2022.

